Lezione 25

Geodetiche in carta $\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$

$x(0) \quad \dot{x}(0)$

Ex:

$H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ modello del semipiano

$g = \frac{1}{y^2} g^E \qquad \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y} \qquad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$

tutti gli altri sono nulli

Sono geodetiche: 1) $x = c \quad y = e^{dt} \qquad d \in \mathbb{R}$

2) $x = \lambda \tanh(dt) + c\,, \quad y = \lambda \frac{1}{\cosh(dt)} \qquad d \in \mathbb{R}$

esistono $\forall t \in \mathbb{R}$ $\qquad \lambda > 0$

$\ddot{x} + 2\dot{x}\dot{y}\left(-\frac{1}{y}\right) = 0$

$\ddot{y} + (\dot{x})^2\left(\frac{1}{y}\right) + (\dot{y})^2\left(-\frac{1}{y}\right) = 0$

In entrambi i casi la geodetica ha velocità $|d|$

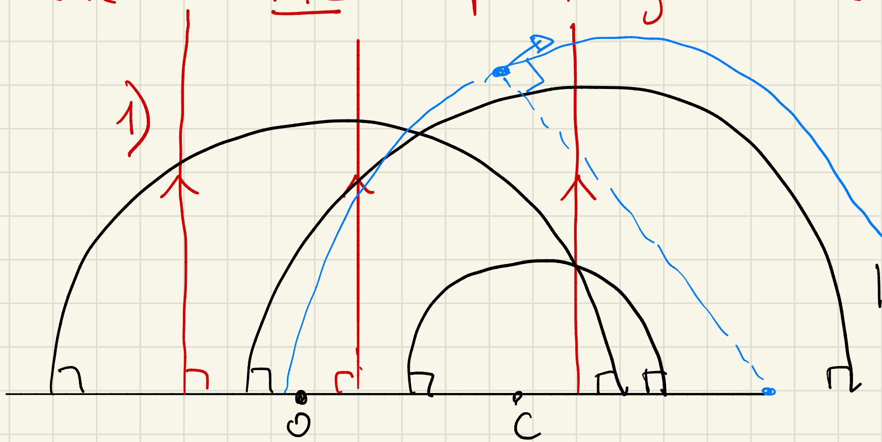
$$\ddot{x} = \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y} \qquad \ddot{y} = \frac{1}{y}\left((\dot{y})^2 - (\dot{x})^2\right)$$

2) $(x-c)^2 + y^2 = \lambda^2$

circonf. di centro $(c,0)$

raggio λ

Queste sono tutte le possibili geodetiche



$$\gamma(t) = (c, e^{dt})$$

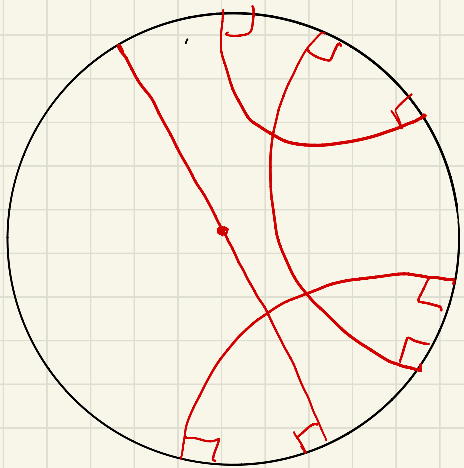
$$\gamma'(t) = (0, d e^{dt})$$

$$\|\gamma'(t)\|^H = \frac{\|(0, d e^{dt})\|^E}{e^{dt}}$$

$$= \left|\frac{d e^{dt}}{e^{dt}}\right| = |d|$$

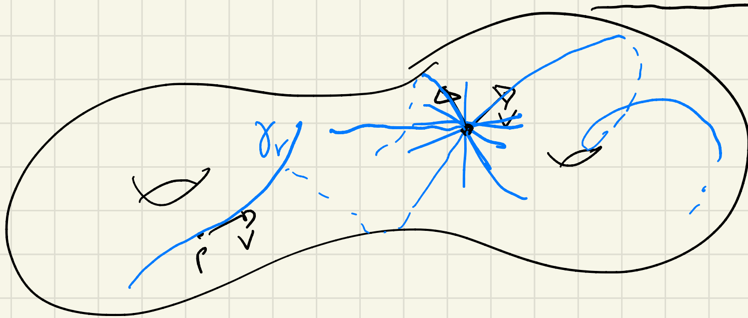
Sono tutte perché realizzano

tutti i possibili p v



$$g(x) = \frac{4}{(1-\|x\|^2)^2}\, g^E$$

FLUSSO GEODETICO



M ~~pseudo~~-R. ∇ ē sufficiente

$\gamma_v : I_v \to M$ geod. $\gamma_v(0) = p$

$\gamma_v'(0) = v$

Definiamo su TM un campo X nel modo seguente:

$(p, v) \in TM \qquad p = \pi(v) \qquad \dashrightarrow \gamma_v \qquad X(v) = d(\gamma_v'(0))_0$

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d] \\ I \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\alpha'"] & M \end{tikzcd}$$

$\alpha : I \to M$ curva $\qquad \alpha'(t) \in T_{\alpha(t)} M$

$X(v) \in T_v TM$

X è liscio. Le sue curve integrali sono $\{ \gamma_v' \mid v \in TM \}$

Il flusso Φ di X si chiama FLUSSO GEODETICO.

$\Phi : U \to TM \qquad U \subseteq TM \times \mathbb{R}$

MAPPA ESPONENZIALE

(M, ∇)

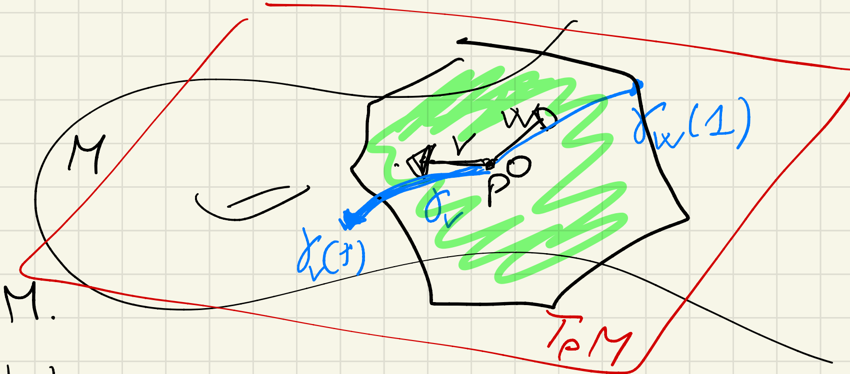
Def: $V \subsetneq TM \qquad V = \{ v \in TM \mid I_v \ni 1 \}$

La MAPPA ESPONENZIALE è $\exp : V \to M$

$v \mapsto \gamma_v(1)$

$\forall p \in M, \quad V_p := V \cap T_pM$

$\exp_p := \exp\big|_{V_p}$



Prop: $V \subseteq TM$ intorno aperto di M.

exp è liscia. V_p è stellato

(cioè se $v \in V_p$ allora $\lambda v \in V_p$ $\forall \lambda \in [0,1]$)

$\gamma_v(t) = \exp(tv)$

dim: $V = \{ v \in TM \mid v \times \{1\} \in U \}$ U ap. $\Rightarrow$ V aperto

$0 \in V_p$ ovvio $\quad I_0 = 1$

Prop: $\exp_p : V_p \to M \qquad V_p \subseteq T_pM$

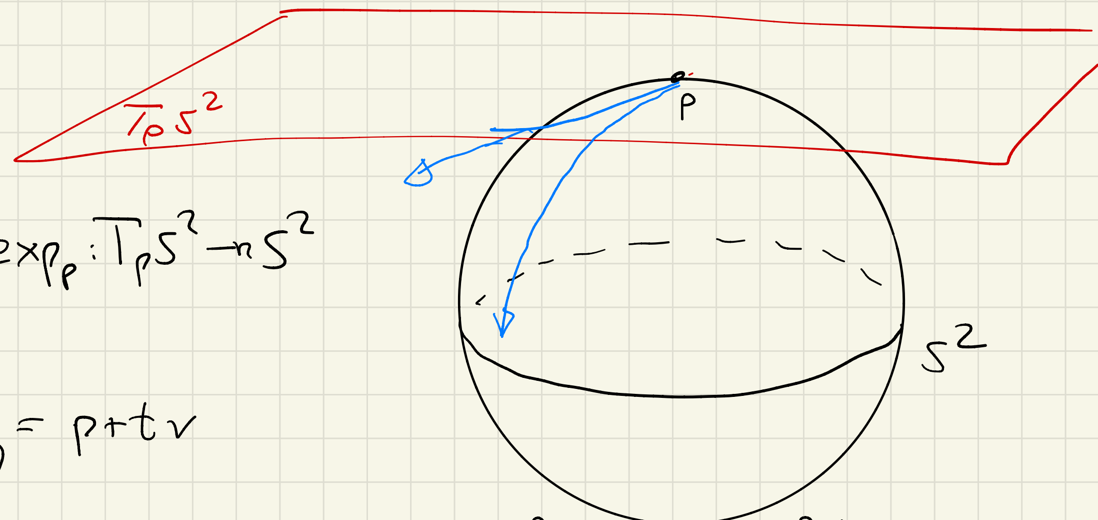
è un diffeo loc. in zero

dim: $d(\exp_p)_0 : T_0 V_p \to T_pM$ è l'identità

$$\begin{array}{c} T_0V_p \\ \parallel \\ T_pM \\ \ni \\ v \end{array} \longmapsto d(\exp_p)_0(v)$$

$\Rightarrow$ $d(\exp_p)_0$ invertibile $\Rightarrow$ $\exp_p$ diffeo loc.

Calcoliamo exp in alcuni esempi



$\exp_p : T_pS^2 \to S^2$

- $\mathbb{R}^{p,q}$ $\quad \Gamma_{ij}^k = 0$

geod. sono $\gamma_{(p,v)} = p + tv$

Quindi $\exp_p(v) = p + v$ $\qquad \exp : T\mathbb{R}^{p,q} \to \mathbb{R}^{p,q}$

$$\begin{array}{c} T\mathbb{R}^{p,q} \\ \parallel \\ \mathbb{R}^{p,q} \oplus \mathbb{R}^{p,q} \end{array} \to \mathbb{R}^{p,q})$$

$(p, v) \longmapsto p+v$

⊙ $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

Le geod. esistono $\forall t$ $\exp : TS^n \longrightarrow S^n$

$(p,v) \longmapsto \cos\|v\| \cdot p$

$\gamma_v(t) = p \cos t + v \,\mathrm{sen}\, t$ $v \in T_pS^n = p^\perp$ $+ \,\mathrm{sen}\,\|v\| \cdot \frac{v}{\|v\|}$

$\|v\| = 1$

$\exp_p : B(\pi) \xrightarrow{\sim} S^2 \setminus \{q\}$

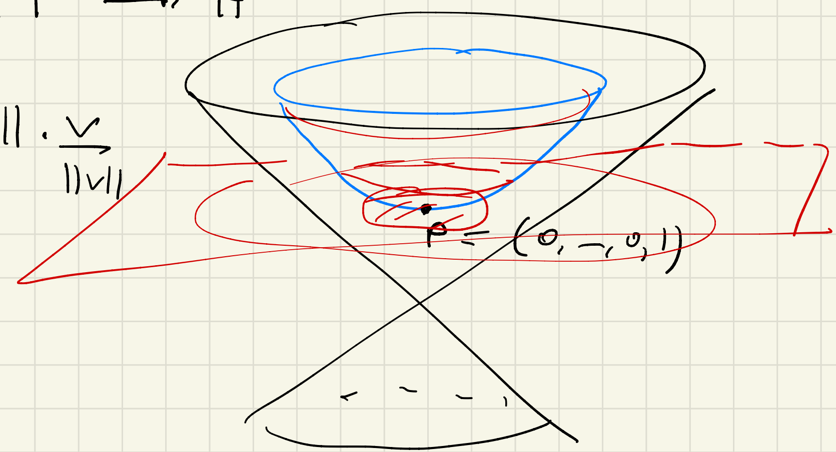
⊙ $H^n \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$ $\exp : TH^n \longrightarrow H^n$

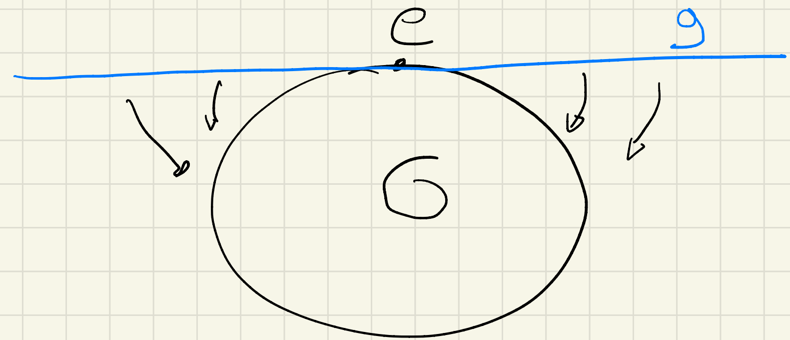
$(p,v) \longmapsto \cosh\|v\| \cdot p + \mathrm{senh}\,\|v\| \cdot \frac{v}{\|v\|}$

Si può dimostrare che $\exp_p$ è diffeo

$\exp_p : T_pH^n \to H^n$

(si scrive l'inversa)




e
g